Formes quadratiques, espaces préhilbertiens réels

I. Formes quadratiques

1) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et $\Omega = {}^tA \times A$. On considère la forme quadratique Q représentée par Ω dans la base canonique. Montrer que Q est positive, et qu'elle est définie positive si et seulement si A est inversible.

2) Déterminer si les formes suivantes sont positives, définies positives :

   (a) $q_1(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$

   (b) $q_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$

   (c) $q_3(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

3) (a) Soit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions continues de carrés intégrables sur l'intervalle I. On pose $a_{i,j} = \displaystyle\int_I f_i f_j$. Montrer que la matrice $(a_{i,j})_{i,j}$ est positive, et définie positive si et seulement si la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

   (b) Montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels strictement positifs distincts, la matrice $H = (h_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de terme général $h_{i,j} = \dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$ est définie positive.

4) Soit q une forme quadratique sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ telle que pour tout couple $(A,B) \in (\mathfrak{M}_2(\mathbb{C}))^2$, $q(AB) = q(A)\,q(B)$. Que dire de q ?

II. Espaces préhilbertiens réels

1) Dans chacun des cas suivants, trouver les conditions pour que φ soit un produit scalaire sur E :

   - $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x,y),(x',y')) = axx' + byy' + c(xy' + x'y)$;
   - $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(0)\,Q^{(n)}(0)$, puis $\varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)\,Q(n)}{n!}$;
   - $E = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum x_n^2 < +\infty\right\}$, $\varphi((x_n),(y_n)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$;
   - $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A,B) = \operatorname{tr}{}^tAB$; déterminer une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ orthonormée pour φ.

2) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E telle que

$$(\forall x \in E)\ \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2$$

   Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

3) Soit E un espace préhilbertien réel E, et $f, g : E \to E$ telles que : $\left(\forall (x,y) \in E^2\right)\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. Montrer que f et g sont linéaires.

4) **Orthogonal de l'ensemble des fonctions polynomiales**

   On munit $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$. On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales. Montrer que l'orthogonal de F est réduit à $\{0\}$.

5) (a) Montrer l'existence et l'unicité de $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $(\forall P \in \mathbb{R}_n[X])\ P(0) = \displaystyle\int_0^1 A_n(t)\,P(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 PQ$. Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$(\forall P \in \mathbb{R}[X])\ \ P(0) = \langle A, P\rangle\ ?$$

6) **Polynômes de Laguerre**

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels.

(a) Montrer que $\varphi : E \times E \to \mathbb{R},\ (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $g_k(x) = x^k e^{-x}$, et $L_k(x) = \dfrac{e^x}{k!} g_k^{(k)}(x)$ (ce sont les *polynômes de Laguerre*).

i. Montrer que L_k est polynomiale, et calculer ses coefficients.

ii. Montrer que si P est de degré strictement inférieur à $k-1$, alors $\varphi(L_k, P) = 0$.

iii. Montrer que si $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, alors $\varphi(L_k, P) = (-1)^k\, k! a_k$.

iv. En déduire que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.

7) **Polynômes orthogonaux**

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et μ une fonction "fonction convenable" de I dans $\mathbb{R}^{*+}$.

On pose, pour P et Q dans E, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_I P(t)\, Q(t)\, \mu(t)\, \mathrm{d}t$.

(a) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

(b) On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la base canonique $\left(X^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ de E, pour obtenir $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux (mais non nécessairement normés).

(c) Montrer que chaque P_i est scindé à racines simples sur $\circ I$.

(d) Trouver λ_n et μ_n deux suites réelles telles que $P_n = (x + \lambda_n) P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$. Vérifier que $\mu_n > 0$.

(e) Montrer que les racines de P_{n-1} sont entrelacées dans celles de P_n.

8) **Projections orthogonales**

(a) Soit E un espace euclidien de dimension 4, de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ orthonormale. On considère le sous-espace F de E d'équations

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

Trouver une base orthonormée de E, donner la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur F, et calculer $d(e_1, F)$.

(b) Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer les équivalences :

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \iff (\forall x \in E)\ \|p(x)\| \leqslant \|x\| \iff p \text{ est auto-adjoint}$$

9) **Distance à un sous-espace**

(a) On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : pour $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i b_i$.

Soit $H = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$. Trouver une base orthonormée de H, et calculer $d(X, H)$.

(b) Calculer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2\, \mathrm{d}t$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(a_1, \dots, a_n) = \displaystyle\int_0^1 (1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2\, \mathrm{d}x$.

i. Montrer que f admet un minimum μ_n, atteint en un point unique de $\mathbb{R}^n$, et calculer ce minimum (utiliser les *déterminants de Gram*).

ii. Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit e_k la fonction $t \mapsto t^k$. Prouver que l'orthonormalisée de $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$, où $H_k(t) = \lambda_k \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(t^k (1-t)^k\right)$, λ_k et $H_k(0)$ étant à préciser.

iii. Soit E_n le sous-espace de E engendré par $(e_0, \dots, e_n)$, et $\mathcal{H}_n$ celui engendré par $(a_1, \dots, a_n)$.

Prouver que $\mathcal{H}_n^{\perp} \cap E_n = \mathbb{R}g$, où $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, les b_k étant définis par l'égalité entre fractions rationnelles :

$$\frac{(X-1)(X-2)\dots(X-n)}{(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{X+k+1}$$

Retrouver ainsi la valeur de μ_n.

III. Sujet d'étude : matrices et déterminants de Gram

Soit E un espace euclidien de dimension n. Pour $(x_1, \ldots, x_k) \in E^k$, on pose :

$$\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_k) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \quad \text{et} \quad G(x_1, \ldots, x_k) = \det(\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_k))$$

$\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_k)$ et $G(x_1, \ldots, x_k)$ sont respectivement la *matrice* et le *déterminant de Gram* du système $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$.

1) Montrer que le déterminant de Gram de k vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ ne change pas si l'on ajoute à l'un d'entre eux une combinaison linéaire des autres.

   En déduire que si $(x_1, \ldots, x_k)$ est lié, alors $G(x_1, \ldots, x_k) = 0$.

2) On suppose réciproquement que $G(x_1, \ldots, x_k) = 0$. Montrer l'existence de scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tous nuls tels que

$$(\forall i \in [\![1, k]\!]) \ \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \right\rangle = 0$$

   En déduire que le système $(x_1, \ldots, x_k)$ est lié.

3) Soit $E' = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$ et $\mathscr{B}' = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base orthonormale de E'.

   (a) Montrer que $p \leqslant k$, et que $p < k$ si et seulement si $(x_1, \ldots, x_k)$ est liée.

   (b) Soit $A' \in \mathfrak{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs x_i sur la base $\mathscr{B}'$. Montrer que $\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_k) = {}^tA'A'$ et que $G(x_1, \ldots, x_k) \geqslant 0$.

   (c) En déduire une autre démonstration du résultat démontré aux questions 1) et 2).

4) Quelles sont les matrices et déterminants de Gram d'une famille orthogonale de vecteurs ? d'une famille orthonormale ? d'une base orthogonale ? d'une base orthonormale ?

   Étudier la réciproque dans chaque cas.

5) On suppose désormais la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ libre. On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à ce système, pour obtenir un nouveau système $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$.

   Montrer que $G(x_1, \ldots, x_k) = G(y_1, \ldots, y_k) = \|y_1\|^2 \ldots \|y_k\|^2$. En déduire une interprétation simple de $G(x_1, \ldots, x_k)$.

6) Soit E' un sous-espace vectoriel de E. Soit p la projection orthogonale sur E'. On appelle *distance d'un vecteur y de E à E'* le nombre $\|y - p(y)\|$, noté $d(y, E')$.

   (a) Faire une figure pour visualiser ce contexte.

   (b) Soit $\mathscr{B}' = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ une base de E' (pas nécessairement orthogonale). Montrer, en distinguant le cas $y \in E'$ (qui est trivial) et le cas $y \notin E'$ que $d(y, E') = \sqrt{\dfrac{G(e_1, \ldots, e_k, y)}{G(e_1, \ldots, e_k)}}$ (utiliser la question 5)).

7) **Application au calcul explicite des coefficients du procédé de Schmidt**

   Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Soit $\mathscr{B}' = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base orthonormale obtenue par le procédé de Schmidt. On note $G_k = G(e_1, \ldots, e_k)$ et $D_{j,k}$ le cofacteur du terme $\langle e_j, e_k \rangle$ dans $\mathscr{G}(x_1, \ldots, x_k)$, et on écrit $\varepsilon_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_{k,j} e_j$. Montrer que : $\alpha_{k,j} = \dfrac{D_{j,k}}{\sqrt{G_k G_{k-1}}}$.

   (Indication : si X_k est la matrice de ε_k dans la base $(e_1, \ldots, e_k)$, interpréter $G_k X_k$ et ${}^tX_k G_k X_k$.)