TD : les formules d'Euler et de Stirling

I. La formule d'Euler

1) *Préliminaire*

On considère la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel strictement positif. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$ sa somme partielle d'ordre n, et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} w_k$ son reste d'ordre n s'il existe.

Indiquer deux méthodes permettant de retrouver le résultat :

- si $\alpha > 1$, $R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$,
- si $\alpha = 1$, $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$,
- et si $\alpha < 1$, $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha-1} n^{1-\alpha}$

2) *Développement asymptotique de la série harmonique*

Pour $n \geqslant 1$, on pose $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

(a) En considérant σ_n comme la somme partielle d'ordre n de la série de terme général $u_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$, montrer qu'elle est convergente. Sa limite $\gamma \approx 0{,}577215664$ est appelée *constante d'Euler*.

(b) Montrer que $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\tfrac{1}{n}\right)$.

(c) On pose $\tau_n = \sigma_n - \gamma - \dfrac{1}{2n}$, qu'on considère comme suite des sommes partielles d'une série $\sum v_n$.

Trouver un équivalent de v_n, en déduire que $\tau_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.

On obtient finalement le développement asymptotique : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)}$

II. La formule de Stirling

Dans cette partie, on recherche un équivalent de $n!$.

1) On considère la suite de terme général $S_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \ln n - n - \ln(n!)$.

(a) En considérant S_n comme la somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n, montrer qu'elle est convergente.

(b) Notant $L = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, en déduire que $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{e^L} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

2) Nous allons déterminer la constante e^{-L} à l'aide des *intégrales de Wallis* : $(\forall n \in \mathbb{N})\ W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$.

(a) Calculer W_0, W_1, et montrer que pour $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)\,W_{n-2}$.
En déduire les valeurs de W_{2p} et W_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$. En déduire que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
Substituant dans cette relation les valeurs trouvées pour W_{2p} et W_{2p+1}, en déduire que

$$\frac{2^{4p}\,(p!)^4}{((2p)!)^2\,(2p+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

(c) En injectant dans cette dernière relation les équivalents de $p!$ et $(2p)!$ trouvés précédemment, trouver la constante cherchée.

On obtient donc la *formule de Stirling* : $\boxed{n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$.