

Intégrales impropres

I. INTÉGRABILITÉ, CONVERGENCE

1) 📖 Pour bien comprendre le cours

Soit f continue par morceaux sur l'intervalle $[a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Préciser les liens (implication, équivalence) entre les assertions suivantes :

- 1) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Qu'en est-il si l'on suppose de plus f décroissante sur $[a, \infty[$?

2) 📖 Préciser la nature des intégrales suivantes, en discutant en fonction des éventuels paramètres :

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$	(c) $\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$	(e) $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$	(g) $\int_0^{+\infty} \cos(\ln x) dx$
(b) $\int_1^{+\infty} \frac{t^a dt}{(1-t)^b}$	(d) $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$	(f) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{ \sin t (1+e^t)}}$	(h) $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t \ln(\ln t)}$

3) Montrer que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, mais que par contre l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

4) ★★ Intégrales de Bertrand

Pour α et β réels, on étudie la nature de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

- (a) Traiter les cas $\alpha \neq 1$, par comparaison à une intégrale de Riemann bien choisie.
- (b) On suppose ici $\alpha = 1$. Calculer $\int_e^x \frac{dt}{t (\ln t)^\beta}$, et en déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.

5) 📖 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$ continue, décroissante.

- (a) Montrer que $t \mapsto f(t) \sin t$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- (b) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) \sin t dt$ converge si et seulement si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

6) 📖 Des intégrales un peu folle

- (a) Pour $\lambda > 0$, calculer $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \lambda^2 \sin^2 x}$.
- (b) En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1 + g(t) \sin^2 t} dt$, dans les deux cas suivants :
 - i. $f(t) = t^\alpha$, $g(t) = t^\beta$,
 - ii. $f(t) = e^{\alpha t}$, $g(t) = e^{\beta t}$.

7) Deux énoncés qui se ressemblent

- (a) Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue. Montrer que si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ pour tout $\alpha > 0$.
- (b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, périodique de période $T > 0$. On note $m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$. Montrer que $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge si et seulement si $m = 0$.

8) Sommes de Riemann

(a) Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante et intégrable sur $]0, 1]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}\right)^{1/n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}\right)^{1/n}$.

(b) Soit f continue, positive, décroissante sur $\mathbb{R}^+$, telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} h f(nh) \right) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

II. CALCULS D'INTÉGRALES IMPROPRES

1)  Convergence et calcul des intégrales suivantes, en utilisant éventuellement le changement de variable fourni :

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + pt + q}$

(d) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt \quad (u = \sqrt{1-t})$

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} \quad (u = \tan \frac{x}{2})$

(e) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t} \quad (u = e^t)$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3} - 1}{x(1+x)^{2/3}} dx \quad (u = (1+x)^{1/3})$

(f) $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2 + 1)^2} dt \quad (u = \frac{1}{t} \text{ sur }]0, 1])$

2)  Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \operatorname{Arc} \tan(x) - \operatorname{Arc} \tan(x-1)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi = \pi$.

Proposer une généralisation de ce résultat.

3) Étudier la convergence de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) t^\alpha dt$. Calculer $I(0)$.

4) (a) Calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4}$ (on pourra poser $u = t^2$).

(b) Établir que $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$. En déduire la valeur de I (Indication : factoriser $1+t^4$).

5) ★  Un grand classique, et deux autres qui lui ressemblent

(a) i. Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$.

ii. Pour $x > 0$, montrer que $I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$. En déduire la valeur de I .

(b) i. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

ii. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx$, et en déduire la valeur de I .

(c) Utiliser un procédé similaire pour calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc} \tan 2x - \operatorname{Arc} \tan x}{x} dx$.

6)  Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

(b) Montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2} dt$ est comprise entre $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \cotan^2 t \sin^2 nt dt$.

(c) Calculer $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ et $A_n - B_n$. En déduire les valeurs de A_n et B_n en fonction de n .

(d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$, en déduire la valeur de cette intégrale.