Intégrales à paramètres

I. Études de fonctions définies par des intégrales

1) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^{*+}$, et étudier les variations de f.
   (b) Déterminer les limites, puis des équivalents, de f en 0^+ et en $+\infty$.

2) Soit f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.
   (b) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
   (c) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et la limite de f en $+\infty$.

3) **Des intégrales à paramètre pour le calcul d'intégrales classiques**

   (a) Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, que la fonction $f + g^2$ est constante, et en déduire la valeur de l'*intégrale de Gauss* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

      i. Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, et qu'elles sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.
      ii. Montrer que f et g sont continues en 0. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

4) **Théorème de division**
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, $a \in I$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in [\![0, \alpha-1]\!]$.
   Montrer que g définie sur I par $g(x) = \dfrac{f(x)}{(x-a)^\alpha}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I *(Indication : utiliser la formule de Taylor avec reste intégral en a).*

5) **Des formes closes obtenues par dérivation**

   (a) Soit F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

      i. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
      ii. Montrer que F est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$, en déduire la valeur de $F(x)$.

   (b) En dérivant la fonction, déterminer l'expression de la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-t^2}\,\mathrm{d}t$.

6) **Transformée de Laplace**
   Soit f continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. On pose $\mathscr{L}(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^{*+}$, et qu'elle y est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   (b) On suppose que f admet une limite finie ℓ non nulle en $+\infty$. Montrer que $\mathscr{L}(f)(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{x}$.
   (c) On suppose f T-périodique. Donner un équivalent de $\mathscr{L}(f)$ en 0^+.
   (d) On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est continue en 0.

7) **Recherche de limites et d'éqiuivalents**

(a) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Chercher $\lim\limits_{x \to 0^+} \displaystyle\int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(b) Donner un équivalent pour $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(c) Chercher un équivalent lorsque $n \to \infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

8) **Des variables partout !**

Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ continues. Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.

II. La fonction Gamma

La fonction Γ est définie par la relation $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que Γ est des classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

2) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3) Calculer $\Gamma(1/2)$ en fonction de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, dont on rappelle que la valeur est $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Montrer que Γ est convexe, d'abord en calculant Γ'', puis sans recourir à Γ''.

5) Le but de cette question est le calcul de $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t e^{-1}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, $0 \leqslant \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \leqslant e.e^{-t}$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln t e^{-1}\,\mathrm{d}t$.

(c) En constatant que $\displaystyle\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u$, conclure que $\Gamma'(1) = -\gamma$, γ désignant la constante d'Euler.

(d) Calculer alors $\Gamma'(2)$.