Réduction des matrices et des endomorphismes

I. VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES

- 1) ☞ Donner un exemple d'un endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ qui n'admet aucune valeur propre.
- 2) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que 0 est valeur propre de f^n . Montrer que 0 est valeur propre de f .
- 3) Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Montrer que $\text{Sp}(u^{-1}) = \{\lambda^{-1}, \lambda \in \text{Sp}(u)\}$.
- 4) ☞ Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère les endomorphismes D et P de E définis par

$$D(f) = f' \quad \text{et} \quad P(f) = \left[x \mapsto \int_0^x f \right]$$

Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les espaces propres de D , P , $D \circ P$ et $P \circ D$.

- 5) Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées, et Δ et Θ les endomorphismes de E définis par :

$$\Delta(u) = v \text{ avec } v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{et} \quad \Theta(u) = w \text{ avec } w_0 = u_0 \text{ et } w_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Δ et de Θ .

- 6) Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $P \mapsto (X^2 + 1)P' - 2nXP$ induit un endomorphisme f de E .

Déterminer les éléments propres de f . On pourra, au choix :

- partir de la résolution de l'équation différentielle $(E) : (x^2 + 1)y' - (2nx + \lambda)y = 0$,
- ou raisonner sur les zéros des "polynômes propres".

- 7) ★☞ Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $A \in \mathbb{R}[X]$, et $B \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n + 1$, scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

(a) Montrer que l'application f qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de AP par B est un endomorphisme de E .

(b) Déterminer les éléments propres de f .

- 8) Soit la matrice $C_{p,q} = \begin{pmatrix} U_{p,q} & (0) & U_{p,q} \\ (0) & (0) & (0) \\ U_{p,q} & (0) & U_{p,q} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, où $U_{p,q}$ est la matrice de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

Chercher les éléments propres de $C_{p,q}$. $C_{p,q}$ est-elle diagonalisable ?

II. DIAGONALISATION

- 1) À quelles conditions les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 2) Diagonaliser les matrices suivantes dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) ★ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, de rang 1. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A)A$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable, et déterminer ses éléments propres.

4) ★ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer A^k , pour $k \in \mathbb{N}$, et éventuellement

$k \in \mathbb{Z}$,

- en considérant A comme combinaison linéaire de deux matrices commutant,
- en supposant que A^k est de la même forme que A , et en raisonnant par récurrence,
- en trouvant un polynôme annulateur simple de A .

5) ★ **Matrices circulantes**

(a) Soit $S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $S_{i,j} = 1$ si $j - i = 1 \pmod{n}$, 0 sinon. Montrer que S est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) En déduire la diagonalisabilité de la matrice *circulante* : $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, et une factorisation de son déterminant.

6) (a) ★ Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable, et $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ diagonalisable.

Montrer que $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 A & \lambda_1 A \\ \lambda_3 A & \lambda_4 A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

(b) *Généralisation* : soit $A = [a_{i,j}] \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{C})$. On note $A * B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{C})$.

i. Montrer que $(A * B)(A' * B') = (AA')(BB')$. En déduire que $A * B$ est inversible si et seulement si A et B le sont.

ii. Déterminer le spectre de $A * B$, en déduire χ_{A*B} , $\text{tr}(A * B)$ et $\det(A * B)$.

III. SOUS-ESPACES STABLES

1) (a) Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On suppose que u et v commutent. Montrer que $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v . Réciproque ?

(b) Soit p un projecteur et f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Montrer que p et f commutent si et seulement si $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par f .

2) Déterminer les sous-espaces vectoriels stables pour l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

3) ★ Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$, et que v est nilpotent.

On désire montrer que $\det(u + v) = \det u$ en raisonnant par récurrence sur la dimension n .

(a) Traiter le cas $n = 1$ et le cas $v = 0$.

(b) Pour $n \geq 2$ et $v \neq 0$, former les matrices de u et v dans une base adaptée à $\text{Im } v$. Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence aux restrictions de u et v à $\text{Im } v$ (après avoir justifié que cela a un sens).

4) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan de E .

(a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\{u \in E^* / u(H) = \{0\}\}$.

(b) Montrer que si H a pour équation $u(x) = 0$, alors H est stable par f si et seulement si $u \circ f$ est colinéaire à u .

(c) Soit A et L les matrices dans $\mathcal{B}$ de f et u . Montrer que H est stable par f si et seulement si tL est vecteur propre de tA .

(d) *Application* : déterminer les plans stables par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

IV. EXERCICES PLUS THÉORIQUES

- 1) ☞ Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathfrak{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^2 + I_5 = 0$.
- 2) Soit $E = \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}) / \det(M) = 1\}$.
- (a) Quelle est la structure de E ?
- (b) Montrer que si $A \in E$ vérifie $A^p = I_2$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, alors $A^{12} = I_2$.
- 3) ★☞ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, de base $(e_1, \dots, e_n)$. Si σ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (un élément de $\mathfrak{S}_n$, quoi !), on note f_σ l'endomorphisme de E définie par $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour $1 \leq i \leq n$.
- Étudier les valeurs propres, les vecteurs propres et la diagonalisabilité de f_σ .
- 4) ★ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, Φ_A et Ψ_A les endomorphismes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définis par $\Phi_A(M) = AM$ et $\Psi_A(M) = MA$.
- (a) Montrer que A et Φ_A ont les mêmes valeurs propres, et préciser les sous-espaces propres de Φ_A en fonction de ceux de A .
- (b) Déterminer les valeurs propres de Ψ_A .
- (c) Montrer que Φ_A et Ψ_A sont diagonalisables si et seulement si A l'est.
- 5) ★☞ Soit A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On souhaite établir l'égalité $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- (a) Montrer cette égalité dans le cas où $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
- (b) Pour $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$, justifier que pour $p \in \mathbb{N}$ assez grand, $A + \frac{1}{p}I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. En déduire que l'égalité est encore vraie pour A non inversible.

6) ★★ Réduction simultanée

- (a) Soit A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalisables et commutant ($AB = BA$). Montrer que A et B sont co-diagonalisables (i.e. il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales).
- (b) Montrer que le résultat s'étend au cas d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de matrices diagonalisables et commutant deux-à-deux (on pourra raisonner par récurrence soit sur la dimension des matrices, soit sur la dimension de l'espace engendré par la famille de matrices).
- (c) ☛ Démontrer un résultat similaire lorsqu'on remplace "diagonalisable" par "trigonalisable".
- 7) Soient A, B et M trois matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles qu'il existe λ et μ complexes vérifiant :

$$(\forall k \in \{1, 2, 3\}) \quad M^k = \lambda^k A + \mu^k B$$

- (a) Montrer que M est diagonalisable.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \lambda^n A + \mu^n B$.

8) ★ Matrices stochastiques

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} \geq 0$ pour tout couple (i, j) , et $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ pour tout indice i .

Une telle matrice est dite *stochastique*.

- (a) Montrer que 1 est valeur propre de A .
- (b) Soit λ une valeur propre complexe de A . Montrer que $|\lambda| \leq 1$, et que si $\lambda \neq 1$, alors λ est une racine de l'unité.
- Indication : considérer la composante de valeur absolue maximale d'un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .*
- (c) ☛ On suppose que $a_{i,j} > 0$ pour tout couple (i, j) . Montrer que toutes les valeurs propres réelles ou complexes de A sont dans un disque fermé de rayon strictement plus petit que 1, et tangent intérieurement en 1 au cercle trigonométrique.

9) ★ Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$ et un endomorphisme u de E .

- (a) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On lui associe $F_x = \text{Vect}(u^i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ et on dit que F_x est le *sous-espace cyclique* de E associé à u et engendré par x .
- On note $k_x = \max \{r \in \mathbb{N}^* / (x, u(x), \dots, u^{r-1}(x)) \text{ est libre}\}$.

- i. Montrer que F_x admet une base $e_x = (u^i(x))_{0 \leq i \leq k_x}$ et qu'il est stable par u .
 - ii. Exprimer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme v_x de F_x induit par u en utilisant les coordonnées de $u^{k_x}(x)$ dans la base e_x . Le comparer au polynôme normalisé μ_x qui engendre l'idéal $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(u)(x) = 0\}$ de $\mathbb{K}[X]$.
- (b) Dédurre de ce qui précède une démonstration du *théorème de Cayley-Hamilton* : le polynôme caractéristique de u annule u .

V. TD : UN EXEMPLE D'UTILISATION DE LA DIAGONALISATION

Soit E un espace vectoriel de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E , et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

1) Étude de f

- (a) Calculer le polynôme caractéristique de A . En déduire les valeurs propres de f . Peut-on à ce stade déterminer si f est diagonalisable ?
- (b) Déterminer les espaces propres de f . En déduire que f est diagonalisable.
- (c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2) Application 1 : suites récurrentes

Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ et (x_n) quatre suites de $\mathbb{C}$, vérifiant

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n - 5w_n + 4x_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 2v_n - 5w_n + 4x_n \\ w_{n+1} = -3u_n + v_n - 4w_n + 4x_n \\ x_{n+1} = -3u_n + 2v_n - 7w_n + 6x_n \end{cases}$$

- (a) Calculer u_n, v_n, w_n et x_n en fonction de u_0, v_0, w_0, x_0 et n .
- (b) À quelle condition portant sur u_0, v_0, w_0 et x_0 ces suites
 - restent-elles bornées ?
 - convergent ? vers 0 ?

3) Application 2 : système différentiel

Soit u, v, w et x quatre fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} u' = -2u + v - 5w + 4x \\ v' = -3u + 2v - 5w + 4x \\ w' = -3u + v - 4w + 4x \\ x' = -3u + 2v - 7w + 6x \end{cases}$$

- (a) Montrer que u, v, w et x sont en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- (b) Trouver la solution générale de ce système différentiel, puis montrer qu'il en existe une et une seule vérifiant $u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0$ et $x(0) = x_0$.

4) Application 3 : commutant de A

Soit $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{C}), AB = BA\}$ le commutant de A .

- (a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ contenant $\mathbb{R}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\}$. Quelle en est la dimension ? Peut-on en déduire que $\mathbb{R}[A] \subsetneq \mathcal{C}(A)$?
- (b) Trouver un élément B de $\mathcal{C}(A)$ qui ne soit pas un polynôme en A .