Séries entières

I. Étude de la convergence

1) **Calcul de rayons de convergence**

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ dans les cas suivants :

(a) $a_n = n!$

(b) a_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de e

(c) $a_n = \sum_{d|n} 1$, puis $a_n = \sum_{d|n} d$

(d) $a_n = \sin n\theta$, puis $a_n = \cos n\theta$

(e) $a_n = \frac{n^2+1}{3^n}$

(f) $a_n = e^{-n^2}$

(g) $a_{2n} = a^n$, $a_{2n+1} = b^n$

(h) $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$

(i) $a_n = \int_0^1 \left(1+t^2\right)^n \, \mathrm{d}t$

(j) $a_n = \binom{kn}{n}$

(k) $(\forall p)$ $a_{p^2} = 1$, $a_n = 0$ sinon

(l) $(\forall p)$ $a_{p^3} = p!$, $a_n = 0$ sinon.

2) La série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\sum |a_n| \, x^n$

(b) $\sum n^\alpha a_n x^n$

(c) $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$

(d) $\sum a_n^2 x^n$

3) **Étude sur le cercle d'incertitude**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes, et étudier la convergence sur le cercle d'incertitude :

(a) $\sum \frac{z^n}{n \ln n}$: montrer qu'il y a convergence uniforme sur le disque fermé de convergence, privé de son intersection avec le disque de centre $(R, 0)$ et de rayon $\varepsilon > 0$;

(b) $\sum \frac{z^n}{\sin\left(n\pi\sqrt{3}\right)}$: utiliser l'inégalité $\sin\theta \geqslant \dfrac{2\theta}{\pi}$ valable sur $[0, \pi/2]$;

(c) ☕☕ $\sum (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{z^n}{n}$: montrer que $\left| \sum_{n=0}^{N} (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right| \leqslant 7\sqrt{N}$, utiliser une transformation d'Abel pour conclure que la série est semi-convergente sur le cercle d'incertitude.

II. Calculs de sommes de séries entières

1) Après en avoir déterminé le rayon de convergence, calculer la somme des séries entières suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{n-1}{n!} x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \sin(n\alpha) \, x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\sin^3 n\alpha}{n!} x^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

2) Après en avoir déterminé le rayon de convergence, calculer la somme des séries entières suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} I_n x^n$ où $I_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n \, \mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ où $a_0 = a_1 = 1$ et $(\forall n)$ $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \frac{2}{n+2} a_n$

(c) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{v_n}{n!} x^n$, où $u_0 = v_0 = 1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$

(d) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ où $a_n = \operatorname{card}\left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2, \, 2p + 3q = n\right\}$.

III. Développements en séries entières

1) Existence, calcul et domaine de validité du développement en série entière des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sin^2 x \cos x$

(b) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

(c) $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{1+x^2}\right)$

(d) $f(x) = \operatorname{Arc\,tan} \dfrac{1}{1+x}$

(e) $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$

(f) $f(x) = \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \ln\left(1 + x\sin^2 t\right)\,\mathrm{d}t$

2) En cherchant une équation différentielle dont elles sont solutions, déterminer le développement en série entière des fonctions f suivantes :

(a) $f(x) = (\operatorname{Arc\,sin} x)^2$

(b) $f(x) = e^{-x^2/2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$

(c) $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{\alpha}$

3) **Développabilité**

(a) Soit $a > 0$, et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose qu'il existe A et K deux réels strictement positifs tels que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ \|f\|_\infty \leqslant K n! A^n$$

Montrer que f est développable en série entière en 0.

(b) Soit $R > 0$, et $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle que $f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que f est développable en série entière sur $]-R, R[$.

IV. Étude de la fonction somme

1) Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, et on suppose

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{a_n}{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$, puis former une relation entre leurs sommes.

2) **Principe du maximum**

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

(a) Montrer que pour $0 < r < R$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta$.

(b) Montrer que si $|f|$ admet un extremum local en 0, alors f est constante.

(c) On suppose maintenant que $R = +\infty$, et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)| \leqslant P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

3) Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1, et que sa fonction somme S est bornée.

Montrer que la série $\sum a_n$ converge, et que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4) **Équivalence des coefficients**

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $A(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est 1 et que la série diverge en 1.

(a) Montrer que $A(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.

(b) Soit (b_n) une suite telle que $b_n \sim a_n$. On note $B(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$. Montrer que $B(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} A(x)$.

V. Applications des séries entières

1) **Étude de suites**

(a) Soit (a_n) une suite réelle vérifiant : $(\forall n \geqslant 1)\ \ a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = n\,(-1)^n$.
Expliciter a_n en fonction de a_0, a_1 et n.

(b) Soit (u_n) une suite réelle telle que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{k!} = 1$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

2) **Calcul de sommes de séries**

(a) Convergence et somme de la série $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(2n+1)}$ (considérer $f\,(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n\,(2n+1)}$).

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

i. Sans calculer u_n, déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$.

ii. Déterminer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

(c) Montrer que pour tout $a > 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+na}$.
En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3) **Calcul différentiel**

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4) **Calcul intégral**

(a) On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t \sin t}{1 - 2x\cos t + x^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$. En déduire une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

(b) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on pose $f\,(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)\,\mathrm{d}\theta$.

i. Établir une relation entre $f\,(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

ii. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)$.

iii. En déduire, avec toutes les justifications nécessaires, la valeur de $f\,(x)$ pour $x \in]-1,1[$, puis $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$.

iv. Peut-on donner un sens et une valeur aux expressions $f\,(-1)$ et $f\,(1)$?

5) **Résolution d'équations différentielles**

(a) On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ \left(1+x^2\right) y" + xy' - y = 0$.

i. Déterminer les solutions polynomiales de (E).

ii. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

iii. Résoudre (E).

(b) Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ xy" + 2y' - xy = 0$, en commençant par chercher ses solutions développables en série entière.

6) **Dénombrement, algèbre...**

(a) Pour $n \geqslant 1$, soit I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$. On convient que $I_0 = 1$.

i. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $I_n = I_{n-1} + (n-1)\,I_{n-2}$.

ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge pour tout $x \in]-1,1[$. On note $S\,(x)$ sa somme.

iii. Montrer que : $(\forall x \in]-1,1[)\ \ S'\,(x) = (1+x)\,S\,(x)$.

iv. En déduire une expression de $S\,(x)$, puis une expression de I_n.

(b) i. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(X+1)^m\,(X-1)^n}$.

ii. Déterminer deux polynômes U et V tels que $(X+1)^m\,U\,(X) + (X-1)^n\,V\,(X) = 1$.