Séries numériques

I. Séries à termes positifs

1) Dans chacun des cas suivants, étudier la nature de la série de terme général u_n :

(a) $u_n = \dfrac{1}{n\,|\sin n|}$

(b) $u_n = \dfrac{1}{(\ln(\ln n))^{-\ln(\ln n)}}$

(c) $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$

(d) $u_n = \left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}\right)^{-n^{\frac{5}{2}}}$

(e) $u_n = \left[\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(f) $u_n = a^{\sqrt{n}},\ a > 0$

(g) $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$

(h) $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2\right)^{-1}$

(i) $u_n = \dfrac{n!a^n}{n^{\alpha}n^n}$

(j) $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$

(k) $u_n = \left[\dfrac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{(b+1)(b+2)\dots(b+n)}\right]^{\lambda}$

(l) $u_n = \dfrac{n^b n!}{a(a+1)\dots(a+n)}$

(m) $u_n = \dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

(n) $u_n = \left(\dfrac{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}{2\times 4\times\dots\times 2n}\right)^3$

2) **Irrationalité de** e

(a) À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle, montrer que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

(b) On note $R_n = \displaystyle\sum_{k>n} \frac{1}{k!}$ le reste d'ordre n de cette série. Montrer que $R_n \leqslant \dfrac{1}{n.n!}$.

(c) En déduire que e est irrationnel.
Indication : supposer $e = \frac{p}{q}$ *et considérer* R_q.

(d) En utilisant une méthode similaire, montrer que $\cos 1$ est irrationnel.

3) Trouver la partie entière de $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$.

4) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

5) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

(a) Montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (considérer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$).

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

(c) Application : calculer, pour $0 \leqslant r < 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ et $0 \leqslant r < 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^k$.

6) Soit (a_n) une suite réelle positive. On pose $u_n = \dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$.

(a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
Indication : écrire $a_n = 1 + a_n - 1$ *!*

7) Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{u_n} + u_n - n = 0$.

Etudier, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la nature de la série de terme général $u_n - a\ln n - \dfrac{b}{n}\ln n$.

8) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite nulle.

(b) Etudier la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, et en déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

(c) Etudier la nature de la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$, et en déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.

(d) Nature de la série $\sum u_n$?

(e) Etudier la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$. En déduire un équivalent de u_n.

(f) Nature de la série $\sum u_n^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$?

II. Séries à termes de signe quelconque, séries complexes

1) Dans chacun des cas suivants, étudier la nature de la série de terme général u_n :

(a) $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

(b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$

(c) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt,\ \alpha > 0$

(d) $u_n = (-1)^n \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$

(e) $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

(f) $u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{5}\right)^n\right)$

(g) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$

(h) $u_n = \sin^p(\pi e n!),\ p \in \mathbb{N}^*$

(i) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln\left(n + (-1)^n\right)}$

2) Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

3) **Une bizarrerie de la série harmonique alternée**

(a) Soit $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, terme général de la *série harmonique alternée*. Calculer la somme de cette série.

(b) On pose $a_p = \dfrac{1}{2p-1}$ et $a_p = \dfrac{-1}{2p}$, pour $p \in \mathbb{N}^*$. Soient M et N deux entiers strictement positifs. On définit la suite $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dépendant de M et N en posant :

- les M premiers termes de $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont dans l'ordre les M premiers termes de $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$;
- les N termes suivants de $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont dans l'ordre les N premiers termes de $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$;

On recommence ainsi de suite en épuisant alternativement M termes de la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ puis N termes de la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
Trouver des formules permettant d'exprimer c_p en fonction de $a_{p'}$ et $b_{p''}$.

Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{k(M+N)} c_p$ et la limite de cette somme quand k tend vers $+\infty$.

En déduire que la série de terme général c_p est convergente et calculer $S_{M,N} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} c_p$. N'y aurait-il pas un problème ? Essayer de trouver une explication et généraliser.

4) **Groupement de termes**

On considère la série de terme général u_n. Pour toute injection strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(0) = 0$, on peut considérer la suite (v_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\, v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$$

(a) Montrer que si $u_n \geqslant 0$ pour tout n, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence elles ont même somme.

Applications :

- $u_n = \dfrac{1}{a_n}$, où a_n est le $n^{ème}$ entier ne contenant pas le chiffre 0 dans son développement décimal,
- $u_n = p_n^{-p_n}$, où p_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

(b) Montrer sur un exemple simple que le résultat précédent tombe en défaut si (u_n) n'est pas de signe constant.

(c) On suppose ici que u_n est de signe quelconque, mais de limite nulle. D'autre part, on suppose que $\varphi(n) = pn$, p étant un entier naturel non nul.

Montrer alors qu'on retrouve le résultat précédent : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et de même somme en cas de convergence.

Application :

- $u_n = \dfrac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{n}$
- $u_n = \dfrac{(-1)^{\binom{n}{3}}}{n}$.

(d) Chercher un exemple montrant qu'on ne peut pas généraliser le résultat précédent au cas d'une série à termes de signe quelconque mais de limite nulle, avec des groupements de taille variable.

5) **Sommation par paquets, ou transformation d'Abel**

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On s'intéresse à la série $\sum a_n b_n$.

(a) On note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Montrer que :

$$\left(\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\right)\ \sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k = A_q b_q - A_p b_{p+1} + \sum_{k=p+1}^{q-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right)$$

(b) En déduire que chacune des conditions (I), (II) et (III) ci-dessous est suffisante pour que la série $\sum a_n b_n$ converge :

- (I) la suite (A_n) est bornée, la suite (b_n) est à valeur dans $\mathbb{R}^{*+}$ et converge vers 0 en décroissant,
- (II) la série $\sum a_n$ converge, (b_n) est à valeur dans $\mathbb{R}^{*+}$ et décroissante,
- (III) la suite (A_n) est bornée, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\sum |v_n - v_{n+1}|$ converge.

(c) *Applications*

i. Soit (v_n) une suite réelle convergeant vers 0 en décroissant. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum v_n e^{in\theta}$ est convergente.

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin n\theta}{n^\alpha}$ convergent dès que $\alpha > 0$.

ii. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la série $\sum \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ est encore convergente.

III. SÉRIES DOUBLES, PRODUITS INFINIS

A. Séries doubles

1) (a) Soit $\alpha > 1$.Déterminer un équivalent de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k}^{\alpha}$.

   (b) Pour quelles valeurs de α la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n$ a-t-elle un sens ?

   (c) Montrer qu'alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha}} = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^{\alpha-1}}$.

2) (a) Justifier : $\sum\limits_{n=1,\, n\neq p}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-p^2} = \dfrac{3}{4p^2}$.

   (b) En déduire : $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1,\, n\neq p}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-p^2} \neq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{p=1,\, p\neq n}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-p^2}$.

3) Soit a un complexe de module strictement inférieur à 1.
   En introduisant $u_{p,q} = a^{p(2q-1)}$ $(p, q \geqslant 1)$, établir l'égalité :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a^p}{1-a^{2p}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}$$

4) Convergence et calcul, pour $z \in \mathbb{C}$, de $\sum\limits_{n=0} \dfrac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$.

B. Produits infinis

1) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes.

   (a) Montrer : $1 + \sum\limits_{n=1}^{N} |u_n| \leqslant \prod\limits_{n=1}^{N} 1 + |u_n| \leqslant e^{\sum_{n=1}^{N} |u_n|}$.

   (b) En déduire que la suite croissante $\left(\prod\limits_{n=1}^{N} 1 + |u_n|\right)$ a une limite finie si et seulement si la série $\sum u_n$ est *absolument convergente*.

   (c) On suppose être dans ce cas, et de plus $(\forall n \geqslant 1)$ $1 + u_n \neq 0$. Montrer que $\sum \ln(1+u_n)$ est absolument convergente, et en déduire que $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ converge. On dit dans ce cas que le produit infini $\prod (1+u_n)$ est *absolument convergent*.

2) Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{R}$ le produit infini $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + k^{-p}\right)$ est-il convergent ?

3) Montrer que les produits infinis suivants convergent, et en calculer la somme :

- $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)$
- $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n(n+1)}\right)$
- $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$