Suites et séries de fonctions

I. Modes de convergence

1) ☞ **Passage à la limite simple**

Parmi les propriétés suivantes, quelles sont celles qui sont stables par convergence simple ?

- croissance (large ou stricte),
- périodicité,
- existence d'une limite en un point,
- continuité,
- dérivabilité.
- convexité,

2) ★☞ Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et (x_n) une suite d'éléments de $[a,b]$ convergeant vers $x \in [a,b]$. Montrer que $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ lorsqu'on suppose f continue, ou bien lorsque l'on suppose toutes les f_n continues.

Peut-on se passer de l'hypothèse de continuité ? Ou de l'hypothèse de convergence uniforme ?

3) **Convergence uniforme et continuité uniforme**

(a) Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

(b) Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f, et g une fonction uniformément continue.
Montrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)$ converge uniformément.

4) ☞ Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est polynomiale.

5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, telle que : $(\forall t \neq 0)\ |f(t)| < |t|$. On pose $f_1 = f$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = f \circ f_n$.

Montrer que, pour tout $a > 0$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-a,a]$ vers la fonction nulle.

6) ☞ **Convergence uniforme et opérations**

(a) Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers f et g *bornées*. Montrer que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

(b) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \dfrac{1}{n}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$, mais pas $\left(f_n^2\right)$. Conclusion ?

7) ☞ Soit $f_n : x \mapsto n \cos^n x \sin x$.

(a) Chercher la limite simple f de la suite de fonctions (f_n).

(b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire ?

8) ★☞ **Théorèmes de Dini**

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f continue.

(a) On suppose chaque f_n *croissante* sur $[a,b]$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$.

(b) On suppose cette fois-ci *la suite* (f_n) *croissante*, au sens où $(\forall n \in \mathbb{N})\ f_n \leqslant f_{n+1}$. Montrer que la convergence est ici aussi uniforme sur $[a,b]$.

9) ★☞ **Orthogonalité à $\mathbb{R}_n[X]$ puis à $\mathbb{R}[X]$**

(a) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, et n un entier naturel. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,t^k\,\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a,b[$.

(b) On suppose maintenant que *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,t^k\,\mathrm{d}t = 0$. Que peut-on dire de f ?

II. ÉTUDE DE SUITES DE FONCTIONS

1) ☞ Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_n(0) = 1$, et $f_n(t) = \dfrac{1}{1+\frac{p}{n}}$ si $t \in \left]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}\right]$, pour $1 \leqslant p \leqslant n$.

   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue ; la convergence est-elle uniforme ?

2) Étudier la convergence simple, puis uniforme, des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications définies par :

   (a) ☞ $f_n(t) = n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x \in [0,1]$ (discuter selon les valeurs du réel α) ;

   (b) $f_n(t) = \dfrac{nt^2}{1+nt}$ si $t \geqslant 0$, $f_n(t) = \dfrac{nt^3}{1+nt^2}$ si $t < 0$;

   (c) $f_n(t) = n\cos^n t \sin t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t$) ;

   (d) ☞ $f_n(t) = \cos\left(\dfrac{nt}{n+1}\right)$ pour $t \in \mathbb{R}$

   (e) ☞ $f_n(k\pi) = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et $f_n(t) = \dfrac{\sin^2 nt}{n \sin t}$ si $t \notin \pi\mathbb{Z}$;

   (f) $f_0(x) = x$, et $f_{n+1}(x) = \dfrac{x}{2+f_n(x)}$ pour $x \geqslant 0$.

3) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $g_n(t) = f(nt)$ et $h_n(t) = f(t/n)$.
   Montrer que les suites (g_n) et (h_n) convergent simplement, mais non uniformément, sur $\mathbb{R}^+$.

4) ☞ **Suites de fonctions polynômes**

   (a) Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f_0(x) = x \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ \ f_{n+1}(x) = 3f_n\left(\frac{x}{3}\right) - 4f_n\left(\frac{x}{3}\right)^2$$

      i. Étudier la fonction $t \mapsto 3t - 4t^3$ sur $[0,1]$.
      ii. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x$.
      iii. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
      On pourra déterminer une suite (a_n) telle que pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x) - \sin x| \leqslant a_n x^3$.
      La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

   (b) Soit (P_n) la suite de fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ par :

   $$P_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ \ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right)$$

   Étudier la convergence simple puis uniforme de (P_n) sur $[0,1]$.

5) ★☞ *Un grand classique !*

   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = e^t$.

   (b) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

   $$f_n(t) = e^t - \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \text{ pour } t > -n, \text{ et } f_n(t) = e^t \text{ pour } t \leqslant -n$$

   - Montrer que la restriction de f_n à $\mathbb{R}^+$ est croissante, et en déduire que $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[0,a]$ ($a > 0$).
   - Montrer que la restriction de f_n à $\mathbb{R}^-$ est positive, atteint son maximum en un point x_n et que la suite (x_n) admet -2 pour limite.
   - Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^-$.

6) **Suites de solutions d'une équation différentielle**

   Soit y_n la solution de l'équation (E_n) : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)y'' - \left(2+\dfrac{1}{n}\right)y' + y = 0$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

   (a) Calculer explicitement y_n.

   (b) Déterminer la limite simple y de la suite de fonctions (y_n).

   (c) Vérifier que y est solution de "l'équation limite" de (E_n), avec les mêmes conditions initiales.

III. Sujet d'étude : le(s) théorème(s) de Weierstrass

1) ★☞ **Weierstrass avec les polynômes de Bernstein**

(a) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir l'égalité polynomiale : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k - nX)^2 \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} = nX(1 - X)$.

ii. Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ et $x \in [0,1]$, on note : $I = \left\{k \in \mathbb{N} \ / \ 0 \leqslant k \leqslant n \text{ et } \left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}$.
Vérifier : $\displaystyle\sum_{k\in I} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$.

(b) i. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). A tout $n \in \mathbb{N}^*$ on associe :

$$B_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Montrer que f est limite uniforme sur $[0,1]$ de la suite d'applications polynômiales $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ii. En déduire le théorème de Weierstrass.

2) **Weierstrass avec l'algèbre linéaire**

Pour $x \in [-1,1]$, on considère $\Phi_n(x) = \displaystyle\int_0^x \left(1 - t^2\right)^n \, \mathrm{d}t$ et $F_n(x) = \dfrac{\Phi_n(x)}{\Phi_n(1)}$.

(a) Étudier la suite de fonctions (F_n).

(b) En déduire l'existence d'une suite de polynômes convergeant uniformément sur $[-1,1]$ vers $x \mapsto |x|$.

(c) En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.

3) **Weierstrass à l'aide de la convolution**

Une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues positives et à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ est dite *de Dirac* si :

$$(i) \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ \int_{\mathbb{R}} K_n(t) \, \mathrm{d}t = 1$$

$$(ii) \ \ (\forall \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geqslant n_0) \ \ 0 \leqslant \int_{\mathbb{R}-[-\delta,\delta]} K_n(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

Soit alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et à support compact. On pose :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ (f * K_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) K_n(x - t) \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(x - t) K_n(t) \, \mathrm{d}t$$

Prouver que $(f * K_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Déduire de ce résultat une autre démonstration du théorème de Weierstrass.

4) **Le théorème de Weierstrass pour les fonctions périodiques**

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on considère $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g_n(u) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(n\pi u)}{\sin^2(\pi u)} \text{ si } u \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \text{ et } g_n(u) = n \text{ si } u \in \mathbb{Z}$$

(a) i. Montrer que : $(\forall u \in \mathbb{R}) \ g_n(u) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(n-k)}{n} \cos(2k\pi u)$.

ii. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(u) \, \mathrm{d}u$.

(b) Soit f une application 1-périodique et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. A tout entier $n \geqslant 1$ on associe l'application $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ f_n(x) = \int_0^1 g_n(x - t) f(t) \, \mathrm{d}t$$

i. Montrer que f_n est un "polynôme trigonométrique", *i.e.* qu'il existe des réels $\alpha_{n,k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$, et des réels $\beta_{n,k}$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$, tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \alpha_{n,0} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha_{n,k} \cos(2k\pi x) + \beta_{n,k} \sin(2k\pi x)\right)$$

ii. Montrer que f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

IV. Séries de fonctions : modes de convergence

1) (a) Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ définie par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$, avec $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

(b) Même question avec $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$, avec $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

2) ☞ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\infty[$, on note $u_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\chi_{[n,n+1[}(x)$, où $\chi_I(x) = 1$ si $x \in I$, et 0 si $x \notin I$.

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum u_n$.

3) ☞ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On pose $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n f(x)$.

(a) Condition nécessaire et suffisante sur f pour que la *suite* de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

(b) Montrer que la *série* de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $f(1) = 0$, f dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

V. Étude de fonctions sommes de séries de fonctions

1) Soit $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$, et la calculer.

2) ☞ Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+n^2x}$.

(a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.

(b) Étudier la monotonie de S.

(c) Donner la limite puis un équivalent de S en $+\infty$.

(d) Déterminer un équivalent de S en 0.

3) ☞ On pose $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.

(a) Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(b) Étudier la limite de S en $+\infty$.

(c) Établir que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(d) Déterminer la limite de S en 0^+.

4) Trouver un équivalent en 0^+ et en $+\infty$ de la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \operatorname{th}(x+n) - \operatorname{th} n$.

(a) Établir la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

(b) Justifier que la fonction somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ S(x+1) - S(x) = 1 - \operatorname{th} x$.

(d) Étudier la limite de S en $+\infty$.

6) (a) Soit $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}$.

(b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+3n}$.

7) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, lipschitzienne, $a > 0$ et $\lambda \in]0,1[$. Existe-t-il F, lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; F(x+a) - \lambda F(x) = f(x)$$

8) ☕ Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\theta(x) = x - \mathrm{Ent}(x)$ la partie fractionnaire de x, et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\theta(nx)}{2^n}$.

(a) Étudier la série d'applications $\sum f_n$.

(b) En notant S la somme de la série $\sum f_n$, calculer le saut de S en chaque discontinuité.

VI. Des séries de fonctions historiques

1) ★☞ **La fonction ζ de Riemann**

On pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

(a) Montrer que la fonction ζ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

(b) Étudier la monotonie et la convexité de la fonction ζ.

(c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$, et un équivalent de ζ en 1^+.

(d) En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe.

(e) i. Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?

ii. Si $F(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$, montrer que F est continue sur $[-1,1]$, et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

iii. Donner une expression plus simple de $F(x)$.

2) **La fonction ζ alternée**

On pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\zeta_1(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

(a) Montrer que la fonction ζ_1 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

(b) Établir la relation : $\zeta_1(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

3) ☕ **La fonction de Van Der Waerden**

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\langle t \rangle = d(t, \mathbb{Z}) = \displaystyle\inf_{m\in\mathbb{Z}} |t - m|$.

(a) A tout $n \in \mathbb{N}$ on associe l'application $u_n : t \mapsto \dfrac{\langle 10^n t \rangle}{10^n}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et que sa somme f est continue.

(b) Montrer que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que f n'est monotone sur aucun intervalle d'intérieur non vide.