Calcul exact ou approché de sommes de séries

I. Calculs exacts de sommes de séries

Prouver que les séries suivantes convergent, et calculer leurs sommes :

1) **Fractions rationnelles**

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{(2n-1)(2n+1)(2n+5)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+2in-2}.$$

2) **Sommes télescopiques**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{n^2+n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{2n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^3 3^n\varphi}{3^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\right) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right),\ x\in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

Pour l'avant dernière série, on cherchera d'abord les valeurs de a et b pour lesquelles elle converge. Pour la dernière, on utilisera $\ln(\cos t) = \ln(\sin 2t) - \ln(2\sin t)$.

3) **Retour à la définition**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ (remarquer : } \frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t\text{)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t.$$

4) **Groupement de termes**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor},\ a\in\mathbb{C},\ |a|<1$$

5) **Utilisation de sommes ou de développements connues**

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ avec } u_{2p} = \frac{1}{2^p} \text{ et } u_{2p+1} = \frac{1}{2^{p+1}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4-2n^3+n^2-n+1}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

6) **Produit de Cauchy**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \cos^k\theta \sin^{n-k}\theta\right) \text{ } (0<\theta<\tfrac{\pi}{2}).$$

7) **Divers**

(a) Soit (u_n) une suite vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$.

i. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $b > a+1$.

ii. Montrer que $(n+1)\,u_{n+1} - nu_n = (1-b)\,u_{n+1} + au_n$, puis que $nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

iii. En déduire la somme de la série $\sum u_n$.

(b) Montrer que pour tout $(a,b)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+bn} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

II. Calculs approchés de sommes de séries

A. Quelques exemples

Dans chacun des cas suivants, calculer une valeur approchée de la somme S à la précision demandée. On effectuera une majoration du reste d'ordre n, de manière à répartir les incertitudes.

1) $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ à 5.10^{-7} près.

2) $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{2^n}$ à 10^{-6} près. Valeur exacte ?

3) $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}$ à 10^{-10} près par défaut.

4) $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n^2}}$ à 10^{-6} près.

5) $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5}$ à 10^{-4} près.

6) $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln n}{n^6}$ à 10^{-3} près.

B. Accélération de convergence

On note $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. On se propose de calculer une valeur approchée de S à 10^{-6} près.

1) On note r_n le reste d'ordre n de cette série. Montrer que $0\leqslant r_n\leqslant\dfrac{1}{2n^2}$.

   Combien de termes $\dfrac{1}{k^3}$ faudrait-il calculer pour obtenir une valeur approchée de S à 10^{-6} près ? Cela vous semble-t-il raisonnable ?

2) On se propose d'"accélérer la convergence" en employant la technique suivante :

   Pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, on cherche une série $\sum\beta_n$ que l'on sait somme exactement, et telle que $\beta_n \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha_n$.
   Alors $\alpha_n=\beta_n+\gamma_n$, où γ_n est négligeable devant α_n. Ainsi la série $\sum\gamma_n$ converge "plus vite" que la série $\sum\alpha_n$.

   Évidemment, on peut réitérer le processus pour le calcul approché de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n$.

   Ici, on pose $\alpha_n=\dfrac{1}{n^3}$, $\beta_n=\dfrac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)}$, $\gamma_n=\alpha_n-\beta_n$ et $\delta_n=\gamma_n+\dfrac{1}{n\,(n^2-1)^2}$.

   (a) Calculer exactement les sommes $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,(n^2-1)}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,(n^2-1)^2}$.

   (b) Comme $\dfrac{1}{n^3}=\dfrac{1}{n\,(n^2-1)}-\dfrac{1}{n\,(n^2-1)^2}+\delta_n$, il reste à calculer une valeur approchée de la somme $S'=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\delta_n$.

   On désigne par ρ_n le reste d'ordre n de cette série. Montrer que $0\leqslant\rho_n\leqslant\dfrac{1}{6\,(n-1)^6}$, et en déduire le nombre de termes δ_k qu'il faut calculer pour obtenir une valeur approchée de S' à 10^{-6} près.

   (c) Calculer une valeur approchée de S à 10^{-6} près. On donner le résultat sous forme d'encadrement.

C. 13 **décimales exactes de** π

1) Montrer la relation suivante : $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arc}\tan\dfrac{1}{5} - \operatorname{Arc}\tan\dfrac{1}{239}$ (formule de MACHIN[1]).

   Associée à la relation : $(\forall x \in]-1,1[)\ \operatorname{Arc}\tan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2n+1}$, cette formule présente π sous forme de la somme de deux séries "très rapidement convergentes" :

$$\pi = 16\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,5^{2n+1}}}_{A} - 4\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,239^{2n+1}}}_{B}$$

2) On veut obtenir une valeur approchée de π à 5.10^{-14} près. Comme π se présente comme une somme de 20 termes, nous tolérerons sur A et B une plage d'incertitude de 5.10^{-15} près.

   (a) À quel rang tronquer la somme A pour obtenir une valeur approchée de A à 5.10^{-15} près ? Même question pour B (ne pas oublier l'incertitude liée aux calculs !).

   (b) Avec combien de décimales exactes faut-il calculer les termes de chaque somme pour respecter la plage d'incertitude ?

   (c) Calculer les valeurs approchées obtenues des sommes A et B. Les résultats seront donnés sous forme d'un tableau, les chiffres étant séparés par tranches de 3.

   (d) Faire le bilan de toutes les sources d'incertitude, et donner le résultat final sous forme d'un ancadrement.

C'est par ce procédé que John MACHIN a calculé en 1706 cent décimales de π. Par des formules similaires, on a obtenu 2037 décimales en 1949 grâce à l'ENIAC. Grâce à la formule

$$\frac{\pi}{4} = 12\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{18} + 8\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{57} - 5\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{239}$$

on calcula en 1974, sur un ordinateur CDC 7600, un million de décimales de π en moins de 24 heures ! Ces méthodes montrèrent leurs limites dans les années 80 lorsque, en s'inspirant des travaux de RAMANUJAN[2], on utilisa des fonctions modulaires et des algorithmes itératifs pour calculer un, puis deux milliards de décimales exactes. Par exemple, l'algorithme :

$$y_0 = \sqrt{2}-1,\ \alpha_0 = 6-4\sqrt{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = \frac{1-\sqrt[4]{1-y_n^4}}{1+\sqrt[4]{1-y_n^4}} \text{ et } \alpha_{n+1} = \left(1+y_n^4\right)\alpha_n - 2^{2n+3}y_{n+1}\left(A + y_{n+1} + y_{n+1}^2\right)$$

double le nombre de décimales exactes à chaque itération. Les deux premiers milliards de décimales de $\dfrac{1}{\alpha_{15}}$ coïncident avec celles de π.

[1]John MACHIN, mathématicien anglais, 1680-1752.
[2]Srinivasa RAMANUJAN, mathématicien indien, 1883-1920.