Topologie des espaces vectoriels normés

I. Topologie de $\mathbb{R}$

1) Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ pour laquelle les sept ensembles A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ sont deux-à-deux distincts.

2) ☞ Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

   (a) en étudiant son complémentaire,

   (b) par caractérisation séquentielle,

   (c) en trouvant une application continue par laquelle il est l'image réciproque d'un fermé connu.

3) Montrer que l'ensemble $\left\{\sqrt{m} - \sqrt{n},\ (,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4) (a) ★ Soit (u_n) une suite réelle bornée, telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.

   (b) ★ Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   Montrer que la suite $\left(e^{iu_n}\right)$ est dense dans $\mathbb{U}$.

5) ☞★ **Valeurs d'adhérence de la suite** $(\sin n)_n$

   (a) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et $A = \{ma + n,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

   (b) En déduire que tout réel de l'intervalle $[-1, 1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6) Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ une bijection (il en existe, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ étant tous deux dénombrables). Que peut-on dire des valeurs d'adhérence de la suite (u_n), en tant que suite réelle ?

7) **Équations fonctionnelles**

   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\right)\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$. Montrer que f est affine.

   (b) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et prenant la valeur 1 en 0, telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(2x) = f(x) \cos x$$

II. Normes, topologie des espaces vectoriels normés

1) ☞ **Normes de polynômes**

   Soit $E = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, on pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,, \qquad \|P\|_\infty = \max\left\{|a_k|\,,\ 0 \leqslant k \leqslant n\right\}, \qquad \|P\|_* = \max\left\{|P(t)|\ /\ t \in [0,1]\right\}$$

   Montrer que ce sont des normes sur E, et qu'elles sont deux à deux non équivalentes.
   (Indication : considérer $P_n = (\mathrm{X} - 1)^n$ et $Q_n = 1 + \mathrm{X} + \cdots + \mathrm{X}^n$).

2) E est l'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|\,, \qquad N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f''(x)|\,, \qquad N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$$

   (a) Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.

   (b) Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N_1, ni à N.

   (c) ☕ Montrer que N et N_1 sont équivalentes *(Indication : introduire l'équation différentielle $y'' + y = g$).*

3) Soit $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. La norme uniforme de E est notée ν. Pour $g \in E$, soit $N_g : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \nu(fg) \end{array}\right.$.

(a) Condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.

(b) ☕ g étant choisie pour que N_g soit une norme, comparer N_g et ν. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que N_g et ν soient équivalentes.

(c) ☕☕ Qu'en est-il si $E = \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$?

4) ☞★ Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overset{\circ}{F} = \varnothing$ ou $F = E$.

5) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et $\mathscr{P}$ l'ensemble des projecteurs de E. Montrer que $\mathscr{P}$ est fermé dans $\mathscr{L}(E)$.

6) ☞ Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions de E à valeurs positives ou nulles sur $[0,1]$. Chercher $\overline{\mathscr{P}}$ et $\overset{\circ}{\mathscr{P}}$.

Reprendre ces deux questions avec la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

7) Pour $p \in [\![0,n]\!]$, on note $\mathscr{R}_p$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de rang p, et $\mathscr{R}'_p$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de rang supérieur ou égal à p.

Ces ensembles sont-ils fermés ? Ouverts ? Trouver leur intérieur et leur adhérence.

8) ☞ On munit l'espace des suites réelles bornées $\ell^\infty(\mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

(a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

(b) On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des suites à support compact (i.e. nulles à partir d'un certain rang), et $\mathscr{G}$ l'ensemble des suites de limite nulle.

Montrer que $\mathscr{F}$ est fermé dans E, puis que $\mathscr{F}$ est l'adhérence de $\mathscr{G}$ dans E.

(c) Montrer que l'ensemble des suites (a_n) qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

III. Suites et séries dans les espaces vectoriels normés

1) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et $(\overrightarrow{u_n})_n$ et $(\overrightarrow{v_n})_n$ deux suites de vecteurs, convergeant respectivement vers $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overrightarrow{u_n}$ et $\overrightarrow{v_n}$ sont colinéaires.

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont encore colinéaires.

(Indication : raisonner par l'absurde et compléter $(\vec{u}, \vec{v})$ en une base de E).

2) Soit (u_n) une suite bornée d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) admet une unique valeur d'adhérence.

3) ☞ **Suites de matrices**

(a) Soit $(A_n)_n$ une suite de matrices de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$(1)\ A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}) \qquad (2)\ (\forall n)\ A_n \text{ est inversible} \qquad (3)\ A_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} B \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$$

Montrer que A est inversible, et que son inverse est B. Peut-on retirer l'hypothèse (3) ?

(b) Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^n)_n$ converge vers une matrice P. Que peut-on dire de P ?

(c) ★ Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles convergeant vers A.

4) ☞ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha^n A^n$ converge-t-elle ?

5) ☞★ **Exponentielle de matrice**

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $\exp(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

(a) Montrer que la série définissant $\exp(A)$ converge quelle que soit la matrice A.

(Indication : prendre une norme d'algèbre.)

(b) Montrer que si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\,.\exp(B)$. En déduire, en calculant $\exp(0)$, que $\exp(A) \in \mathrm{GL}(n)\mathbb{R}$.

(c) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\exp(A) = P(A)$.

IV. CONTINUITÉ

1) ☞ On munit $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de la norme $\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \right\| = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$. Étudier la continuité des applications $P \mapsto P'$ et $P \mapsto (\mathrm{X}+1)\, P$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, et $P \mapsto P(x_0)$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{C}$.

2) On munit $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Soit $\varphi : f \mapsto \int_0^{1/2} f(t)\, \mathrm{d}t + \int_{1/2}^{1} f(t)\, \mathrm{d}t$.

   Prouver que φ est continue, calculer sa norme et montrer que celle-ci ne peut être atteinte.

3) ☞ Soit $E = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites complexes presque nulles, muni de la norme $\|x\| = \max_n |x_n|$, et (a_n) une suite complexe quelconque.

   On définit sur E la forme linéaire $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$. Étudier sa continuité.

4) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose : $\Gamma_f = \{(x, f(x)),\, x \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Montrer que si f est continue, alors Γ_f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
   (b) On suppose f bornée. Montrer que si Γ_f est un fermé de $\mathbb{R}^2$, alors f est continue.
   (c) Cette réciproque est-elle encore vraie si l'on ne suppose plus f bornée ?

V. COMPACITÉ, CONNEXITÉ, COMPLÉTUDE

1) ★ **Distance entre un fermé et un compact**
   (a) Soit A et B deux parties compactes de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\|a-b\| = \min_{x \in A,\, y \in B} \|y - x\|$ (autrement dit, la *distance entre* A *et* B est *atteinte*).
   (b) Montrer que cela est encore vrai si on suppose A compact, et B seulement fermée.

2) ☞★ **Un théorème du point fixe**
   Soit E un espace vectoriel normé , X une partie compacte de E, et $f : X \to X$ vérifiant :

$$\left(\forall (x,y) \in X^2\right)\ (x \neq y) \Longrightarrow (\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|)$$

   (a) Montrer que l'application $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x - f(x)\|$ est continue sur X.
   (b) En étudiant la borne inférieure de φ sur X, montrer que f admet un unique point fixe α sur X.
   (c) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $x_0 \in X$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} = f(x_n)$. En étudiant $\|\alpha - x_n\|$, montrer que (x_n) converge vers α.

3) **Suite de Cauchy non convergente**
   Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme définie par $\left\| \sum_{i=0}^{n} a_k X^k \right\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$. On note $P_n = 1 + \mathrm{X} + \frac{\mathrm{X}^2}{2} + \cdots + \frac{\mathrm{X}^n}{n}$.
   Montrer que la suite $(P_n)_n$ est de Cauchy, mais qu'elle n'est pas convergente. Qu'en déduit-on à propos de $(E, \|.\|)$?

4) Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Montrer que si F est complet, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est complet.

5) ☞ Soit E l'espace des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$.
   Montrer que E est complet.

6) Soit $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$, et $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f n'est pas injective.

7) ☞ Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, la sphère unité $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ /\ \|x\| = 1\}$ est connexe par arcs.

8) ☞★ Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Qu'en est-il de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?